

Ա.Ի. Ալիխանյանի անվան Ազգային գիտական Լաբորատորիա
(ԵրՖԻ)

Մկրտչյան Կարապետ Վռամի

Բարձր Մաթեմատիկայի Փոխազգրող Դաշտերի Քվանտային Տեսություններ և
Բարձր Կարգի Կոնֆորմ Ինվարիանտ Լագրանժյաններ

Ա.04.02- «Տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՄԵՂՍԱԳԻՐ

ԵՂԵՎԱՆ-2010

Национальная Научная лаборатория им А. И. Алиханяна
(ЕрФИ)

Мкртчян Карапет Врарамович

Квантовые Теории Взаимодействующих Полей с Высшими Спинами и
Конформно Инвариантные Лагранжианы Высших Степеней

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.04.02 – “Теоретическая физика”

ЕРЕВАН-2010

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ա.Ի. Ալիխանյանի անվան Ազգային
Գիտական Լաբորատորիայում (ԵրՖԻ)
Գիտական ղեկավար՝

Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր
Ռ. Պ. Մանվելյան (ԵրՖԻ)
Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ե. Ա. Իվանով (ՄՀՄԻ, Դուբնա)
Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր
Ռ. Հ. Պողոսյան (ԵրՖԻ)
Երևանի Պետական Համալսարան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Առաջատար կազմակերպություն՝

Պաշտպանությունը կայանալու է 2010թ. դեկտեմբերի 21-ին ժամը 14.00-ին Ա.Ի.
Ալիխանյանի անվան Ազգային Գիտական Լաբորատորիայում (ԵրՖԻ) գործող
ԲՈՂ-ի 024 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0036, Երևան, Ալիխանյան
եղբայրներ փ. 2):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ա.Ի. Ալիխանյանի անվան
Ազգային Գիտական Լաբորատորիայի (ԵրՖԻ) գրադարանում
Մեղմագիրը առաքված է 2010թ. նոյեմբերի 19-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտ. քարտուղար

Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր

Յ. Դազյան

Է.Գ. Գազարյան

Тема диссертации утверждена в Научной национальной лаборатории имени А. И.
Алиханяна (ЕрФИ).

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
Манвелян Р. П. (ЕрФИ)

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор
Иванов Е. А. (ОИЯИ, Дубна)
доктор физико-математических наук
Погосян Р. Г. (ЕрФИ)

Ведущая организация:

Ереванский Государственный
Университет

Защита диссертации состоится 21-го декабря 2010 года в 14.00 часов на заседании
специализированного совета ВАК 024, действующего при Научной национальной
лаборатории им. А.И. Алиханяна (ЕрФИ), (0036, г. Ереван, ул. Братьев Алиханян 2).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрФИ.

Автореферат разослан 19-го ноября 2010 г.

Учёный секретарь спец. совета, д.ф.м.н.

Э.Д.Газазян

Յ. Դազյան

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория калибровочных полей с высшими спинами – одна из наиболее
важных и затруднительных проблем в современной квантовой теории поля. За
последние десятилетия она вызвала к себе большой интерес. Свободная теория
калибровочных полей с высшими спинами была сформулирована тридцать лет
назад, но попытки построить последовательную и полную нелинейную
лагранжеву теорию со взаимодействием не увенчались успехом. Это очень
важная задача сама по себе. Долгое время царило убеждение, что локальный
Лагранжиан для взаимодействий калибровочных полей с высшими спинами не
существует в плоском пространстве-времени. Недавно было показано, что
существует локальный Лагранжиан калибровочных полей с высшими спинами
в плоском пространстве-времени любой размерности в первом нетривиальном –
кубическом порядке. Классификация и явный вывод этих взаимодействий
очень важны для дальнейших исследований и, возможно, построения полного
нелинейного Лагранжиана взаимодействующих полей с высшими спинами в
пространстве-времени любой размерности: плоском или постоянной кривизны.
Существование полного нелинейного Лагранжиана для этой теории может
открыть новую дверь, ведущую к теории Гипергравитации и, наконец, указать
на возможность преодолеть известный барьер $N \leq 8$ для Супергравитации, что
эквивалентно $s \leq 2$ для максимального спина в теории.

В настоящее время лучший кандидат теории квантовой гравитации –
Теория Струн, которая включает в себя бесконечное количество возбуждённых
состояний с любым спином, что является ещё одной мотивацией для изучения
теории полей с высшими спинами. Есть предположение, что теория
калибровочных полей с высшими спинами описывает безмассовый режим
струнной теории.

АдС/КТП соответствие нуждается в тестировании. Было показано что

АдС дуальная теория критической векторной модели $O(N)$ является теория полей с высшими спинами. Для того, чтобы проверить это соответствие нужна Лагранжева теория взаимодействующих калибровочных полей с высшими спинами вне массовой поверхности. Эта очень актуальная задача дала новую мотивацию для изучения теории калибровочных полей с высшими спинами.

Известны согласованные уравнения движения для калибровочных полей любых спинов, выведенные Михаилом Васильевым, но Лагранжева теория пока остаётся открытой задачей.

Цель диссертационной работы

- Исследование геометрии свободных полей с высшими спинами.
- Исследование поведения пропагатора калибровочных полей с Высшими спинами в ультрафиолетовом пределе и однопетлевой перенормировки массы для этих полей.
- Вывод конформных инвариантов высших степеней по производным с помощью разложения Фейнмана-Грахама.
- Исследование свойств взаимодействий калибровочных полей с высшими спинами и вывод Лагранжиана взаимодействия полей с любыми спинами в кубическом порядке вне массовой поверхности в плоском пространстве-времени любой размерности.

Научная новизна

- Геометрия свободных калибровочных полей с высшими спинами исследована в терминах кривизн и символов Кристоффеля, предложенных деВиттом и Фридманом.

- Исследовано ультрафиолетовое поведение пропагатора Калибровочных полей с высшими спинами, а так же посчитана однопетлевая перенормировка массы калибровочных полей с высшими спинами в четырёхмерном пространстве Анти-де-Ситтера в специальном случае взаимодействия.
- Предложен новый метод построения конформно инвариантных операторов и Лагранжианов с помощью разложения $d+2$ размерной метрики Фейнмана-Грахама. Установлена связь с другим методом построения конформных инвариантов. Предложены и анализированы расширенные преобразования Пенроуза-Брауна-Хенно.
- Кубические взаимодействия калибровочных полей с высшими спинами исследованы на разных примерах. Выведен Лагранжиан в самом общем случае кубического взаимодействия калибровочных полей любых спинов с любым возможным количеством производных в плоском пространстве любой размерности вне массовой поверхности.

Практическая ценность работы

Формализм и методы разработанные в этой работе очень полезны и могут быть широко использованы в решении разных проблем теоретической физики высоких энергий. Эти результаты могут быть использованы многими теоретиками по всему миру, работающими в смежных областях теоретической физики.

Научные положения, выносимые на защиту

- Ультрафиолетовое поведение пропагатора калибровочных полей с высшими спинами.
- Однопетлевая диаграмма и перенормировка массы калибровочного поля с высшим спином.
- Вывод конформных инвариантов с помощью разложения Фейнмана-Грахама. Его связь с процедурой Риччи - калибрования и расширенными преобразованиями Пенроуза-Брауна-Хено.
- Существование и единственность кубических взаимодействий калибровочных полей с высшими спинами в плоском пространстве-времени любой размерности.
- Лагранжиан этих взаимодействий вне массовой поверхности для полей с любым спином и любого количества производных.

Апробация работы

Результаты этой работы были представлены в следующих конференциях и школах:

- International conference "Scientific session dedicated to the 90th anniversary of Yerevan State University", 11-15 May 2009, Yerevan State University, Yerevan, Armenia.
- IV Международная Сахаровская конференция по физике SC4, 18-23 мая 2009 года, Москва, Физический институт

им. П.Н. Лебедева РАН.

- International school "New Perspectives in String Theory", 8-19 June 2009, Galileo Galilei Institute for theoretical physics, Florence, Italy.
- International conference "Supersymmetries and Quantum Symmetries' 09", 29 July - 3 August 2009, Bogolyubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia.
- Prospects in Theoretical Physics Program 2010, "Aspects of Supersymmetry", 19 - 30 July, Institute for Advanced Study, Princeton, USA.
- Humboldt Kolleg/XIV International Conference "Symmetry Methods in Physics" ("SYMPHYS - XIV"), 16 - 22 August, 2010, Tsakhkadzor, Armenia.

Результаты этой диссертационной работы также представлены и обсуждены на семинарах Ереванского Физического Института, Ереванского Государственного Университета, Технического Университета Кайзерслаутерна, Физического Института Российской Академии Наук имени П. Н. Лебедева в Москве, Объединённого Института Ядерных Исследований в Дубне, Scuola Normale Superiore в Пизе, Университета Рима "Tor Vergata", Университетов Монса и Брюсселя в Бельгии.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 6 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, 6 дополнений и списка литературы из 128 наименований. Общий объём работы составляет 129 страниц печатного текста.

Содержание работы

Во введении обсуждается важность этой работы, её практическая ценность и связь с подобными результатами других групп.

В первой главе кратко обсуждена формулировка Фронсдала (метрико-подобная формулировка) теории свободных полей с высшими спинами. Даны основные положения и обозначения этой теории, а так же технические методы для дальнейшей работы. Получены тождества Бианки, а так же некоторые новые тождества для кривизн и символов Кристоффеля деВитта-Фридмана и тензора Фронсдала. Важный новый результат этой главы можно сформулировать так: в Фронсдаловской теории калибровочных полей с высшими спинами есть только две нетривиальных, калибровочно - инвариантных величины – тензор Фронсдала и кривизна поля с высшим спином. Все остальные калибровочно инвариантные величины можно выразить через эти две. Для поля со спином два – линейризованной гравитации - это тензоры Ричи и Римана соответственно.

Во второй главе исследовано ультрофиолетовое поведение пропагатора калибровочного поля с высшим спином. Пропагатор выведён в калибровках де Дондера и Фейнмана. Существование калибровки Фейнмана для калибровочного поля с любым спином доказано. В этой калибровке пропагатор выражается через Гаусовские гипергеометрические функции, для которых аналитическое продолжение стандартно.

Калибровка Фейнмана очень полезна в пертурбативном рассмотрении АдС/КТП. Для того, чтоб сохранить калибровочную инвариантность, пропагаторы должны связываться с сохраняющимися токами. Построены такие токи, включающие в себя поле со спином l и Хиггсовский скаляр, для полей со спинами $l \pm 2$.

Однопетлевая диаграмма с такими взаимодействиями имеет два поля с высшими спинами как внешние линии, которые “ампутированы” на языке КТП: они находятся вне массовой поверхности и на них действует оператор Фронсдала, делая их калибровочно - инвариантными. Внутри петли имеем произведение скаляра со следом поля спина $l+2$ в калибровке Фейнмана. Эта диаграмма имеет ультрофиолетовую расходимость, которую можно регуляризовать и перенормировать с выделением конечного калибровочно - инвариантного контрчлена и конечной перенормировки массы, выражающуюся следующей формулой:

$$\delta m_\ell^2 = \frac{g_\ell^2 \Omega_3 (\ell - 2)(\ell + 2)}{8N\pi^4 (\ell + 1)} = \frac{g_\ell^2 (\ell - 2)(\ell + 2)}{4N\pi^2 (\ell + 1)},$$

что является основным результатом этой главы.

В третьей главе предложен новый метод построения конформно - инвариантных операторов и Лагранжианов с помощью $d+2$ размерного обёртывающего пространства Фейнмана-Грахама. Основная идея Фейнмана-Грахама состоит в уверенности, что диффеоморфизмы и локальные конформные инварианты низших размерностей могут быть получены из соответствующих репараметризационно инвариантных контрчленов в пространстве высшей размерности, конформная инвариантность размерности d реализуется как часть диффеоморфизмов в размерности $d+2$. С другой стороны разложение Фейнмана-Грахама связано с AdS_{d+1}/CFT_d соответствием и играет ключевую роль в выведении

голографических аномалий в разных размерностях. Иерархия конформно - инвариантных степеней Лапласиана (или инвариантного Лагранжиана) в пространстве-времени размерности $d \geq 2k$, действующих на скалярные поля с конформной размерностью $\Delta_{(k)} = k - d/2$, выведенной с помощью прямой Нётеровской процедуры, получена снова с помощью разложения Феффермана-Грахама. Этот вывод с помощью обёртывающего пространства раскрыл замечательную и таинственную особенность этих дифференциальных инвариантов: появление $2k$ размерной голографической аномалии в k -том члене этой иерархии.

Дальше предложено расширенное или калиброванное $d+2$ размерное пространство Феффермана-Грахама, чтобы установить связь между методом разложения метрики Феффермана-Грахама и с другим интересным методом построения Вейл-инвариантных Лагранжианов, полученным А. Иорио, Л. О'Рафerti, И. Заксом и С. Вайзендангером и названным "калибрование Риччи". Универсальность и очарование $d+2$ размерного метода Феффермана-Грахама определяется существованием так называемых диффеоморфизмов Пенроуза-Брауна-Хенно. Обсуждаются новые преобразования Пенроуза-Брауна-Хенно, чтобы исследовать разложение $d+2$ размерной метрики в присутствии калибровочного поля Вейла и разъяснить голографическое происхождение калибрования Риччи.

Для полноты это положение пробует на хорошо известном случае $k=1$.

$$S_{(1)} = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} \left\{ g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_{(1)} \partial_\nu \varphi_{(1)} - \frac{d-2}{4(d-1)} R \varphi_{(1)}^2 \right\}$$

Далее обсуждается известный случай $d=4$, и давно выведенный конформно - ковариантный оператор четвёртого порядка в размерностях $d \geq 4$, который осуществляет дальнейшую проверку нашего положения, включающую

вторую Эйлереву характеристику E_2 . Далее проводится новый расчёт локально Вейл инвариантного третьего порядка Лапласиана в пространство-временных размерностях $d \geq 6$ или, другими словами, строится конформно - инвариантное действие для скаляра с конформной размерностью $3-d/2$, связанной с гравитацией.

Далее то же самое действие конформной связи скаляра с гравитацией, описанное выше, обобщается в другом направлении: предлагается обобщение Вейлевской инвариантности для высших спинов и строится Вейл инвариантное (и калибровочно инвариантное) кубическое взаимодействие скаляра с внешним полем высшего спина в пространстве AdS_D , с любой пространство-временной размерностью D . Показывается, что конформное кубическое взаимодействие скаляра с полем высшего спина единственное и описывается Лагранжианом, который является прямым обобщением конформного взаимодействия скаляра с гравитацией.

В четвёртой главе обсуждаются разные случаи калибровочно - инвариантных кубических взаимодействий калибровочных полей с высшими спинами в плоском (Минковском) пространстве любой размерности. Сначала исследуется кубическое взаимодействие безмассового векторного (электромагнитного) поля с полем высшего спина. Выводятся сохраняющиеся токи для полей высших спинов, построенных от безмассовых векторных полей. Потом выводятся Лагранжианы взаимодействий поля со спином два с полями со спинами четыре и шесть. Далее выводится взаимодействие поля спина s с полем спина $2s$ с помощью Нётеровской процедуры. В результате получается Лагранжиан, который имеет форму свёртки поля с током, где ток спина $2s$ из поля спина s строится в полной аналогии с тензором Белла-Робинсона спина четыре построенного из поля спина два и тензором энергии-импульса спина два, построенного из векторного поля со спином единица.

Далее детально обсуждается самодействие калибровочных полей с высшими спинами. В случае спина два, линеаризованной гравитации, строится

кубический порядок линейризованного Лагранжиана Эйнштейна-Гилберта. Потом решается кубическое самодействие поля спина четыре прямыми вычислениями. После долгих расчётов полный список Лагранжевых членов самодействия калибровочного поля со спином четыре в кубическом порядке представляется в явном виде в тензорных компонентах. Обсуждается общий случай, пишется главный член кубического самодействия калибровочного поля с любым высшим спином. Далее подробно изучается самый общий случай взаимодействия калибровочных полей с высшими спинами в плоском пространстве-времени любой размерности. Представлено полное решение уравнения Нётера в первом нетривиальном – кубическом порядке взаимодействия.

Показано, что *существует локальный Лагранжиан для первого нетривиального порядка - кубического взаимодействия калибровочных полей с любыми высшими спинами, включающий в себя производные высших степеней от этих полей.*

Представлен полный список Лагранжевых членов для кубического взаимодействия калибровочных полей с любыми высшими спинами s_1, s_2, s_3 . Решение уравнения Нётер пишется универсальным образом для любого возможного количества производных в кубическом Лагранжиане. Ограничения на количество производных выведены, результат находится в полной согласованности с результатом, ранее полученным Р. Мецаевым в калибровке светового конуса. Количество производных Δ в кубическом Лагранжиане взаимодействия калибровочных полей со спинами

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3$$

ограничена снизу и сверху:

$$s_1 + s_2 - s_3 \leq \Delta \leq s_1 + s_2 + s_3$$

и принимает $s_3 + 1$ возможных значений, где s_3 - наимизшее значение спина полей, участвующих во взаимодействии. Главный член (не зависящий от следов и дивергенций полей) Лагранжиана взаимодействия пишется в следующей компактной форме:

$$\begin{aligned} & L_{(1)}^{(\text{leading})}(h^{(s_1)}(z), h^{(s_2)}(z), h^{(s_3)}(z)) \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \int_{z_1, z_2, z_3} \delta(z-z_1) \delta(z-z_2) \delta(z-z_3) \\ & [(\nabla_{12} \partial_c)^{s_3-n+\gamma} (\nabla_{23} \partial_a)^{s_1-n+\alpha} (\nabla_{31} \partial_b)^{s_2-n+\beta} (\partial_a \partial_b)^\gamma (\partial_b \partial_c)^\alpha (\partial_c \partial_a)^\beta] \\ & h^{(s_1)}(a; z_1) h^{(s_2)}(b; z_2) h^{(s_3)}(c; z_3) \end{aligned}$$

Показано, что кубические взаимодействия калибровочных полей с высшими спинами однозначно определяются условием калибровочной инвариантности с точностью до переопределения полей и интегрирования по частям.

В заключении подчёркиваются основные результаты работы.

Заключение

Далее идут основные результаты данной диссертационной работы:

- Предложена иерархия конформных скаляров с растущими масштабными размерностями $\Delta_{(k)} = k - d/2$, $k=1,2,3,\dots$ связанные с k -той характеристикой Эйлера в соответствующих размерностях $d \geq 2k$. Приведены соответствующие конформно - инвариантные Лагранжианы с k -той степенью Лапласиана в известных случаях $k=1,2$, полностью

построен и анализирован следующий случай с $k=3$. Та же иерархия выведена с использованием метода $d+2$ размерного обёртывающего пространства Фейффермана-Грахама. Соответствующая загадочная голографическая структура этих операторов разъяснена. Исследовано также $d+2$ -мерное происхождение процедуры Риччи калибрования, предложенной А. Иорио, Л. О'Рафerti, И. Заксом и К. Вайзендангером в качестве нового метода построения Вейл инвариантных Лагранжианов. Предложены и проанализированы откалиброванная обёртывающая метрика, разложение Фейффермана-Грахама и расширенные преобразования Пенроуза-Брауна-Ханно [1].

- Детально проанализирована сингулярная ультрафиолетовая структура пропагатора калибровочного поля высшего спина в AdS_4 . Исследованы возможные взаимодействия с Хиггсовским скаляром и соответствующая однопетлевая перенормировка массы. Эта перенормировка массы конечна и связана с аномальной размерностью соответствующего сохраняющегося тока в дуальной конформной теории поля на трёхмерной границе, сохранение которого нарушается при включённом взаимодействии. В частности эта аномальная размерность пропорциональна $l-2$ [2].

- Получен явный вид линейризованного, калибровочно-инвариантного взаимодействия скалярного поля с калибровочным полем произвольного высшего спина l в пространстве AdS_D . Предложено обобщённое Вейлевское преобразование и построено соответствующее Вейл инвариантное действие в случае произвольного спина l . В обоих случаях линейризованное взаимодействие для калибровочного поля высшего спина l включает также взаимодействия скаляра с полным набором калибровочных полей со спинами меньшими чем l [3].

- Получено линейризованное калибровочно-инвариантное взаимодействие скалярного и векторного полей с полями высших спинов в пространстве Анти де Ситтера. Для случая скалярного поля, определено также Вейлевское преобразование и получено Вейл – инвариантное взаимодействие. В обоих случаях инвариантное взаимодействие с высшим спином l содержит в себе такое же взаимодействие со всеми полями низших четных спинов [4].

- Представлены некоторые трилинейные взаимодействия калибровочных полей с высшими спинами, в случае когда два из трёх значений спинов совпадают. Используя Нётеровскую процедуру, построен Лагранжиан взаимодействия в первом нетривиальном порядке разложения по полю вместе с соответствующим калибровочным преобразованием поля. В определённых случаях соответствующий сохраняющийся ток взаимодействия совпадает с обобщённым тензором Белла-Робинсона. В остальных случаях получен конечный набор взаимодействий с калибровочными полями со спинами меньшими чем s_3 , в полном соответствии с предыдущими результатами [3] для взаимодействия скалярного поля с калибровочными полями высших спинов [5].

- С помощью процедуры Нётер представлено полное решение для трилинейного взаимодействия калибровочных полей с произвольными спинами s_1, s_2, s_3 в плоском пространстве-времени. Обсуждена возможность расширения данной конструкции до следующего порядка разложения по калибровочным полям. Доказаны определённые теоремы по классификации кубических взаимодействий и самодействий с различным числом производных и различными соотношениями между спинами взаимодействующих полей. Обсуждено

также разложение калибровочного преобразования для поля спина s , а также замкнутость соответствующей алгебры преобразований [6].

The list of papers published on the subject of the Thesis:

1.R. Manvelyan, K. Mkrtchyan and R. Mkrtchyan, "Conformal invariant powers of the Laplacian, Fefferman-Graham ambient metric and Ricci gauging," Phys. Lett. B **657** (2007) 112 [arXiv:0707.1737 [hep-th]].

2.R. Manvelyan, K. Mkrtchyan and W. Rühl, "Ultraviolet behaviour of higher spin gauge field propagators and one loop mass renormalization," Nucl. Phys. B **803** (2008) 405, [arXiv:0804.1211 [hep-th]].

3.R. Manvelyan and K. Mkrtchyan, "Conformal invariant interaction of a scalar field with the higher spin field in AdS_D ," Mod. Phys. Lett. A **25** (2010) 1333, [arXiv:0903.0058 [hep-th]].

4.K. Mkrtchyan, "Linearized Interactions of Scalar and Vector Fields with the Higher Spin Fields in the AdS_D ," published in the proceedings of "Scientific session dedicated to the 90th anniversary of Yerevan State University" vol.1, pp. 118-126, also in *Armenian Journal of Physics, 2010, vol. 3, issue 2, pp. 98-106.*

5.R. Manvelyan, K. Mkrtchyan and W. Rühl, "Off-shell construction of some trilinear higher spin gauge field interactions," Nucl. Phys. B **826** (2010) 1 [arXiv:0903.0243 [hep-th]].

6.R. Manvelyan, K. Mkrtchyan and W. Rühl, "General trilinear interaction for arbitrary even higher spin gauge fields," Nucl. Phys. B **836** (2010) 204, [arXiv:1003.2877 [hep-th]].

Ամփոփում

Հետազոտված է բարձր չափողականություններում Բարձր Սպիններով դաշտերի երկրաչափությունը դեՎիտ-Ֆրիդմանի կորությունների ու Քրիստոֆելի սիմվոլների լեզվով:

Ստացված է Բարձր Սպիններով դաշտերի պրոպագատորը բարձր էներգիաների սահմանում և կիրառված ԱդՄ/ԿԴՏ համապատասխանության խնդրում՝ քառաչափ ԱդՄ-ում:

Առաջարկված է նոր մեթոդ կոնֆորմ ինվարիանտներ կառուցելու համար՝ օգտվելով Ֆեֆերման-Գրահամի մետրիկայի ռեդուկցիայից, ինչպես նաև բացահայտված է նոր մեթոդի թաքնված կապը մեկ այլ հզոր մեթոդի հետ՝ Պենրոուզ-Բրաուն-Հեննոյի ձևափոխված դիֆեոմորֆիզմների միջոցով:

Առաջարկված է Վեյլի ձևափոխությունների ընդհանրացումը Բարձր Սպիններով դաշտերի համար և ստացված է համապատասխան Վեյլ ինվարիանտ փոխազդեցության Լագրանժյանը Բարձր Սպիններով դաշտերի և սկալյար դաշտի միջև:

Օգտվելով Նյոտերի մեթոդից՝ ստացված են Բարձր Սպիններով դաշտերի խորանարդային փոխազդեցությունների մի շարք օրինակներ, և, որ ամենակարևոր արդյունքն է, լուծված է հարթ տարածությունում կամայական սպիններով դաշտերի խորանարդային (ինքնա-) փոխազդեցության ամենաընդհանուր դեպքը՝ ապացուցելով այդ փոխազդեցությունների լոկալ Լագրանժյանի գոյությունը հարթ տարածությունում, ինչը բավական երկար ժամանակ կասկածի տակ էր:

Ապացուցված է Բարձր Սպիններով դաշտերի խորանարդային փոխազդեցությունների միարժեքությունը՝ մասերով ինտեգրման և

դաշտերի վերասահմանման ճշտությամբ: Սա նշանակում է, որ Բարձր Սպիններով դաշտերի տեսության Լագրանժյանը բոլոր կարգերում միարժեք որոշվում է տրամաչափային ինվարիանտության պայմանից: